Sur l'intérêt du bayésien pour l'analyse d'incertitudes dans un contexte industriel : Information disponible et enjeux décisionnels

Merlin Keller[1] & Alberto Pasanisi[1] & Eric Parent[2]
[1] EDF R&D [2] AgroParisTech

AppliBugs déc. 2011

Modèle déterministe

Le cadre général de l'analyse d'incertitudes (Kennedy et O'Hagan (2001)) est celui d'un modèle déterministe :

$$\mathrm{Y} = G(\mathrm{X}), \tag{1}$$

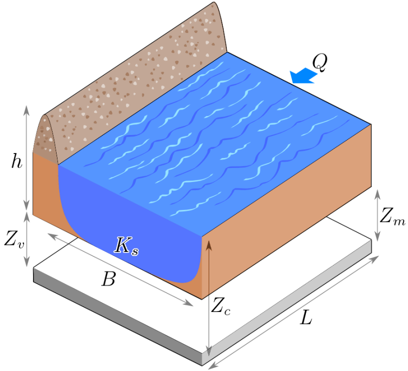
avec :

- X vecteur des entrées ;
- $G(\cdot)$ code déterministe (fonction) ;
- Y sortie du système (scalaire).

Utilisation : Décrit le fonctionnement d'un système physique

Exemple

Modèle hydraulique simplifié de relation débit/hauteur pour un tronçon de rivière :



$$Z_c = Z_v + \left\{ Q \,/\, \left(BK_s \sqrt{(Z_m - Z_v)/L} \right) \right\}^{0.6}. \qquad (2)$$

- Ici, B, K_s, Z_m, Z_v et L déterminent complètement G.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Probabilisation des entrées

Déscription mathémathique

- Si X variable aléatoire, de cdf $F(t)$;

$\Rightarrow$ Y variable aléatoire, de cdf $H(t) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leq t) = \mathbb{P}(G(\mathrm{X}) \leq t)$

- $H = H(\Theta)$, avec $\Theta := (F, G)$ *l'état de la nature* (not. : $H(t) = H(t|\Theta)$)

Interprétation et commentaires

- F traduit la variabilité naturelle des grandeurs physiques modélisées par X.
- Y aléatoire : interprété comme une "propagation d'incertitude" (de Rocquigny et al. (2008), Chick (2009))
- $\Theta = (F, G)$ paramètre fonctionnel, souvent assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Exemple

- Dans le modèle hydraulique (2), Q, représentant le débit maximal annuel, est supposé suivre la loi de Gumbel $\mathcal{G}(\mu, \rho)$, de cdf :

$$F(t) = \exp\left\{-\exp[\,\rho(\mu - t)\,]\right\}.$$

$\Rightarrow$ Z_c représente la cote maximale annuelle, et a pour cdf :

$$H(t|\Theta) = \exp\left(-\exp\left\{\rho\left(\mu - BK_s\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}(t - Z_v)^{5/3}\right)\right\}\right).$$

- Ici $\Theta = (B, K_s, Z_m, Z_v, L, \mu, \rho) \in \mathbb{R}^7$.

Exemple

- Dans le modèle hydraulique (2), Q, représentant le débit maximal annuel, est supposé suivre la loi de Gumbel $\mathcal{G}(\mu, \rho)$, de cdf :

$$F(t) = \exp\{-\exp[\rho(\mu - t)]\}.$$

$\Rightarrow$ Z_c représente la cote maximale annuelle, et a pour cdf :

$$H(t|\Theta) = \exp\left(-\exp\left\{\rho\left(\mu - BK_s\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}(t - Z_v)^{5/3}\right)\right\}\right).$$

- Ici $\Theta = (B, K_s, Z_m, Z_v, L, \mu, \rho) \in \mathbb{R}^7$.

Exemple

- Dans le modèle hydraulique (2), Q, représentant le débit maximal annuel, est supposé suivre la loi de Gumbel $\mathcal{G}(\mu, \rho)$, de cdf :

$$F(t) = \exp\left\{-\exp[\,\rho(\mu - t)\,]\right\}.$$

$\Rightarrow$ Z_c représente la cote maximale annuelle, et a pour cdf :

$$H(t|\Theta) \;=\; \exp\left(-\exp\left\{\rho\left(\mu - BK_s\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}(t - Z_v)^{5/3}\right)\right\}\right).$$

- Ici $\Theta = (B, K_s, Z_m, Z_v, L, \mu, \rho) \in \mathbb{R}^7$.

Exemple

- Dans le modèle hydraulique (2), Q, représentant le débit maximal annuel, est supposé suivre la loi de Gumbel $\mathcal{G}(\mu, \rho)$, de cdf :

$$F(t) = \exp\left\{-\exp[\,\rho(\mu - t)\,]\right\}.$$

$\Rightarrow$ Z_c représente la cote maximale annuelle, et a pour cdf :

$$H(t|\Theta) \;=\; \exp\left(-\exp\left\{\rho\left(\mu - BK_s\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}(t - Z_v)^{5/3}\right)\right\}\right).$$

- Ici $\Theta = (B, K_s, Z_m, Z_v, L, \mu, \rho) \in \mathbb{R}^7$.

Quantité d'intérêt

- On s'intéresse en général à une grandeur caractéristique $\Phi = \Phi(\Theta)$ de la distribution $H(t|\Theta)$ de la sortie Y du système, appelée *quantité d'intérêt*
- $\Phi(\Theta)$ directement liée aux enjeux ayant motivé l'analyse (d'où son nom)
- Son évaluation constitue souvent l'objectif de l'analyse d'incertitudes (de Rocquigny et al. (2008), Aven (2003))
- Le calcul de $\Phi(\Theta)$ ne pose pas de problème conceptuel dès lors que Θ est connu.

Quantité d'intérêt

- On s'intéresse en général à une grandeur caractéristique $\Phi = \Phi(\Theta)$ de la distribution $H(t|\Theta)$ de la sortie Y du système, appelée *quantité d'intérêt*
- $\Phi(\Theta)$ directement liée aux enjeux ayant motivé l'analyse (d'où son nom)
- Son évaluation constitue souvent l'objectif de l'analyse d'incertitudes (de Rocquigny et al. (2008), Aven (2003))
- Le calcul de $\Phi(\Theta)$ ne pose pas de problème conceptuel dès lors que Θ est connu.

Quantité d'intérêt

- On s'intéresse en général à une grandeur caractéristique $\Phi = \Phi(\Theta)$ de la distribution $H(t|\Theta)$ de la sortie Y du système, appelée *quantité d'intérêt*
- $\Phi(\Theta)$ directement liée aux enjeux ayant motivé l'analyse (d'où son nom)
- Son évaluation constitue souvent l'objectif de l'analyse d'incertitudes (de Rocquigny et al. (2008), Aven (2003))
- Le calcul de $\Phi(\Theta)$ ne pose pas de problème conceptuel dès lors que Θ est connu.

Quantité d'intérêt

- On s'intéresse en général à une grandeur caractéristique $\Phi = \Phi(\Theta)$ de la distribution $H(t|\Theta)$ de la sortie Y du système, appelée *quantité d'intérêt*
- $\Phi(\Theta)$ directement liée aux enjeux ayant motivé l'analyse (d'où son nom)
- Son évaluation constitue souvent l'objectif de l'analyse d'incertitudes (de Rocquigny et al. (2008), Aven (2003))
- Le calcul de $\Phi(\Theta)$ ne pose pas de problème conceptuel dès lors que Θ est connu.

Quantité d'intérêt

- On s'intéresse en général à une grandeur caractéristique $\Phi = \Phi(\Theta)$ de la distribution $H(t|\Theta)$ de la sortie Y du système, appelée *quantité d'intérêt*
- $\Phi(\Theta)$ directement liée aux enjeux ayant motivé l'analyse (d'où son nom)
- Son évaluation constitue souvent l'objectif de l'analyse d'incertitudes (de Rocquigny et al. (2008), Aven (2003))
- Le calcul de $\Phi(\Theta)$ ne pose pas de problème conceptuel dès lors que Θ est connu.

Exemples

Poursuivant l'exemple, on considère les quantités d'intérêt suivantes :

- Probabilité de dépassement (="débordement d'une digue de hauteur h") :

$$\Phi(\Theta) = P(Z_c > Z_v + h|\Theta) = 1 - H(Z_v + h|\Theta);$$

- Quantile $\Phi(\Theta) = q_\alpha = H^{-1}(\alpha|\Theta)$ ($q_{1-1/T}$ = "hauteur de la crue T-annuelle") :

$$q_\alpha = Z_v + \left\{ \left(\mu - \frac{1}{\rho} \log \log \frac{1}{\alpha} \right) / \left(K_s\, B \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}} \right) \right\}^{0.6}.$$

Exemples

Poursuivant l'exemple, on considère les quantités d'intérêt suivantes :

- Probabilité de dépassement (="débordement d'une digue de hauteur h") :

$$\Phi(\Theta) = P(Z_c > Z_v + h|\Theta) = 1 - H(Z_v + h|\Theta);$$

- Quantile $\Phi(\Theta) = q_\alpha = H^{-1}(\alpha|\Theta)$ ($q_{1-1/T}$ = "hauteur de la crue T-annuelle") :

$$q_\alpha = Z_v + \left\{ \left(\mu - \frac{1}{\rho} \log \log \frac{1}{\alpha} \right) \Big/ \left(K_s B \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}} \right) \right\}^{0.6}.$$

Exemples

Poursuivant l'exemple, on considère les quantités d'intérêt suivantes :

- Probabilité de dépassement (="débordement d'une digue de hauteur h") :

$$\Phi(\Theta) \quad = \quad P(Z_c > Z_v + h|\Theta) = 1 - H(Z_v + h|\Theta);$$

- Quantile $\Phi(\Theta) = q_\alpha = H^{-1}(\alpha|\Theta)$ ($q_{1-1/T}$ = "hauteur de la crue T-annuelle") :

$$q_\alpha \quad = \quad Z_v + \left\{ \left(\mu - \frac{1}{\rho} \log\log\frac{1}{\alpha}\right) \Big/ \left(K_s\, B\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}\right) \right\}^{0.6}.$$

Exemples

- La valeur h_{opt} qui minimise le coût de construction d'une digue de hauteur h (Bernier (2003)) :

$$c(h;\Theta) = C_0 \times (Z_v + h) + D_0 \times \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Z_c > h}(Z_c - Z_v - h)^2 | \Theta];$$

pour : $\dfrac{C_0}{D_0} = \dfrac{1}{1\,000}$.

- Indices de Sobol (pour l'analyse de sensibilité / l'exploration d'un code)
- ...

Exemples

- La valeur h_{opt} qui minimise le coût de construction d'une digue de hauteur h (Bernier (2003)) :

$$c(h\,;\Theta) = C_0 \times (Z_v + h) + D_0 \times \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Z_c > h}(Z_c - Z_v - h)^2 | \Theta];$$

pour : $\dfrac{C_0}{D_0} = \dfrac{1}{1\,000}$.

- Indices de Sobol (pour l'analyse de sensibilité / l'exploration d'un code)
- . . .

Exemples

- La valeur h_{opt} qui minimise le coût de construction d'une digue de hauteur h (Bernier (2003)) :

$$c(h\,;\Theta) = C_0 \times (Z_v + h) + D_0 \times \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Z_c > h}(Z_c - Z_v - h)^2 | \Theta];$$

pour : $\dfrac{C_0}{D_0} = \dfrac{1}{1\,000}$.

- Indices de Sobol (pour l'analyse de sensibilité / l'exploration d'un code)
- ...

Exemples

- La valeur h_{opt} qui minimise le coût de construction d'une digue de hauteur h (Bernier (2003)) :

$$c(h\,;\Theta) = C_0 \times (Z_v + h) + D_0 \times \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Z_c > h}(Z_c - Z_v - h)^2 | \Theta];$$

pour : $\dfrac{C_0}{D_0} = \dfrac{1}{1\,000}$.

- Indices de Sobol (pour l'analyse de sensibilité / l'exploration d'un code)
- ...

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Incertitude épistémique

- En pratique, Θ n'est jamais connu.
- L'incertitude qui affecte Θ est dite *épistémique* (par manque de connaissance)
- $\Theta = (F, G)$ doit alors être estimé à partir des informations D disponibles, le plus souvent :
  - des mesures $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n)$ d'entrées (pour F) ;
  - des mesures $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{y}}) = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \dots, (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m))$ d'entrée/sortie (pour G).
- L'incertitude sur Θ est dite *réductible* par la collecte de nouvelles données (rejoint la notion d'estimation consistente)

Exemple

Dans le modèle hydraulique (2) :

- on suppose connues les quantités Z_m, Z_v, B et L;
- la transformation G est donc entièrement déterminée par K_s, affecté d'incertitude épistémique.
- (Q et Z_c en revanche sont incertains par nature).

Exemple

Dans le modèle hydraulique (2) :

- on suppose connues les quantités Z_m, Z_v, B et L;
- la transformation G est donc entièrement déterminée par K_s, affecté d'incertitude épistémique.
- (Q et Z_c en revanche sont incertains par nature).

Exemple

Dans le modèle hydraulique (2) :

- on suppose connues les quantités Z_m, Z_v, B et L;
- la transformation G est donc entièrement déterminée par K_s, affecté d'incertitude épistémique.
- (Q et Z_c en revanche sont incertains par nature).

Exemple

Dans le modèle hydraulique (2) :

- on suppose connues les quantités Z_m, Z_v, B et L;
- la transformation G est donc entièrement déterminée par K_s, affecté d'incertitude épistémique.
- (Q et Z_c en revanche sont incertains par nature).

Exemple

Dans le modèle hydraulique (2) :

- on suppose connues les quantités Z_m, Z_v, B et L;
- la transformation G est donc entièrement déterminée par K_s, affecté d'incertitude épistémique.
- (Q et Z_c en revanche sont incertains par nature).

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} = \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Estimation "plug-in"

- Etant donné une estimation ponctuelle $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(D)$ à partir des données D, on peut estimer $\Phi(\Theta)$ par "plug-in" (substitution) :

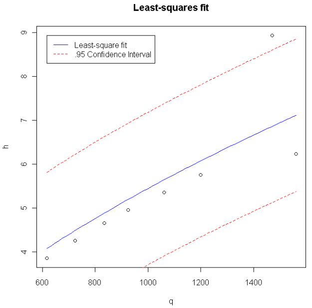
$$\widehat{\Phi} \quad = \quad \Phi(\widehat{\Theta})$$

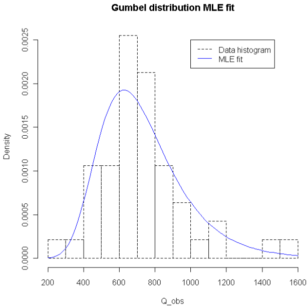
- Valable si l'on dispose d'un nombre suffisant de données ;
- mais en pratique, l'erreur commise en estimant Θ ne peut souvent pas être négligée

Questions

- Comment quantifier l'erreur d'estimation $(\widehat{\Phi} - \Phi)$?
- Quelles conséquences sur l'utilisation des résultats de l'étude ?

Exemples

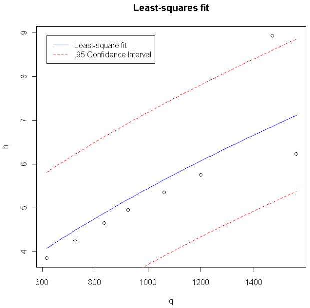


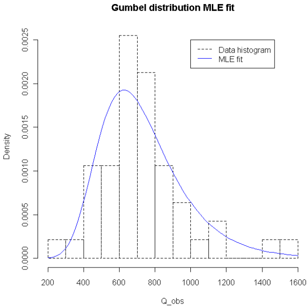


↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Exemples

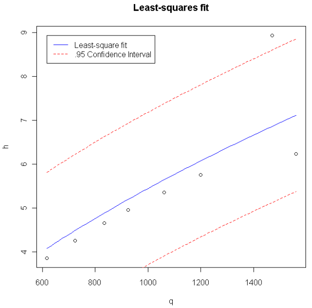


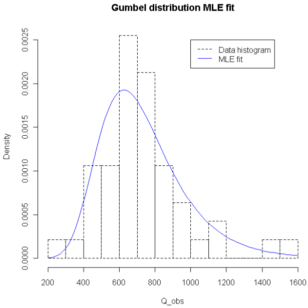


↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Exemples

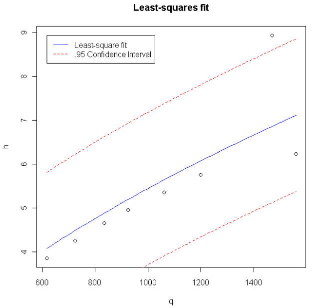


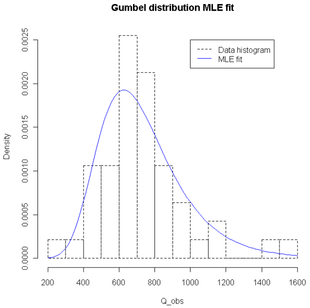


↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Exemples

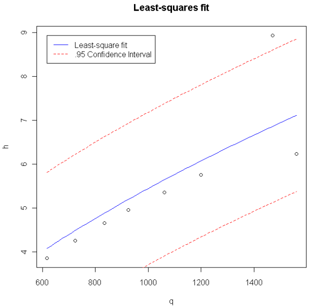


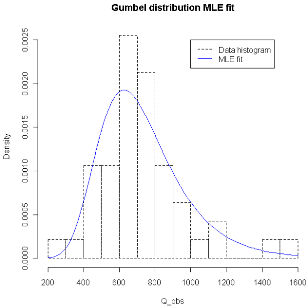


↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Exemples

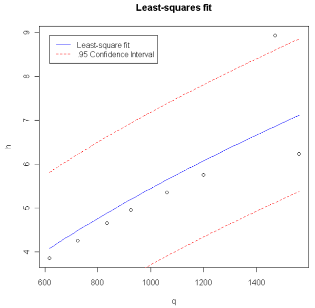


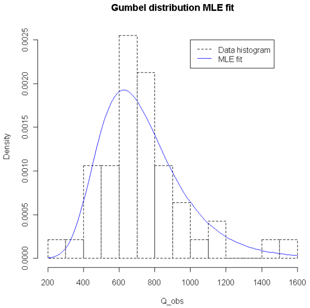


↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Exemples





↑ estimation MLE pour $m = 8$ couples débit/hauteur, $n = 47$ débits maximaux annuels.

- Estimation "plug-in" de quantités d'intérêt :
  - Débordement : $\widehat{\mathbb{P}}(Z_c \geq Z_v + 7.5) = 3.52 \times 10^{-3}$;
  - Crue centennale : $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$
  - Hauteur de digue optimale : $\widehat{h_{opt}} = 8.18m$.

Procédures de Bayes

- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

où $c(d\,;\Phi(\Theta))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ

- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Procédures de Bayes

- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

  où $c(d\,;\Phi(\Theta))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ
- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Procédures de Bayes

- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

où $c(d\,;\Phi(\Theta)))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ

- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Procédures de Bayes

- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

où $c(d\,;\Phi(\Theta)))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ

- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Procédures de Bayes

- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

  où $c(d\,;\Phi(\Theta)))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ
- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Procédures de Bayes

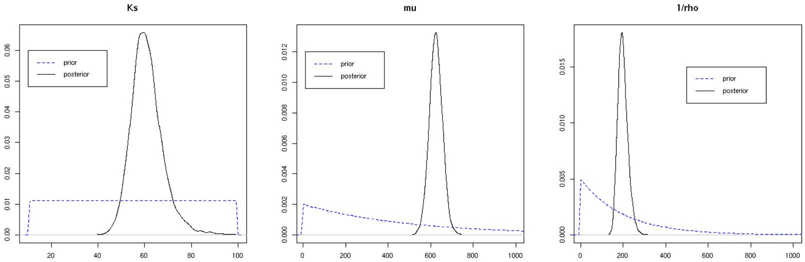
- La théorie de l'estimation bayésienne répond aux deux questions précédentes ;
- Étant donnée une loi $\pi(\Theta)$, la décision optimale au sens de Bayes correspond au minimum du coût intégré :

$$\widehat{\Phi}_{\pi}^{Bayes} = \arg\min_{d} \int c(d\,;\Phi(\Theta))\pi(\Theta|D)\mathrm{d}\Theta, \qquad (3)$$

où $c(d\,;\Phi(\Theta))$ encode les conséquences d'une sur(sous) estimation de Φ

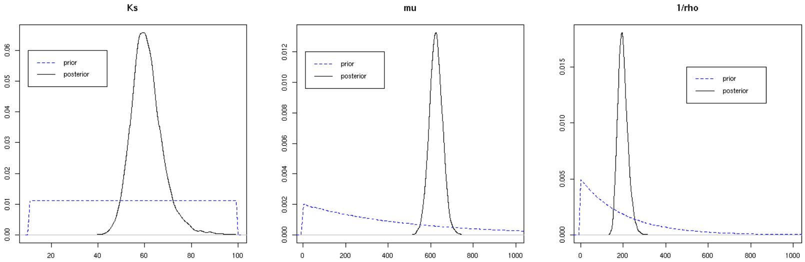
- De tels estimateurs ont d'excellentes propriétés fréquentistes (*admissibilité* notamment)
- Les statisticiens bayésiens donnent de plus à $\pi(\Theta)$ le sens d'un pari probabiliste sur Θ.

Exemple.



- ↑ Distributions marginales *a posteriori* des paramètres
- Hauteur optimale de digue : $\widehat{h_{opt}}^{Bayes} = 10.76\ m$ $(\widehat{h_{opt}} = 8.18\ m.)$

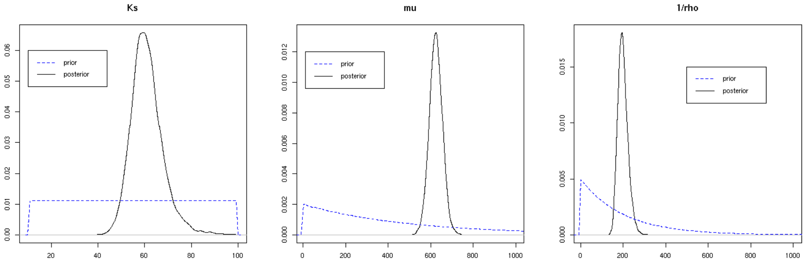
Exemple.



↑ Distributions marginales *a posteriori* des paramètres

- Hauteur optimale de digue : $\widehat{h_{opt}}^{Bayes} = 10.76\ m$ $(\widehat{h_{opt}} = 8.18\ m.)$

Exemple.



↑ Distributions marginales *a posteriori* des paramètres

- Hauteur optimale de digue : $\widehat{h_{opt}}^{Bayes} = 10.76\,m$ $(\widehat{h_{opt}} = 8.18\,m.)$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle “raisonnable” de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par “raisonnable”...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d - \Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d - \Phi|$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle "raisonnable" de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par "raisonnable"...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d - \Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d - \Phi|$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle "raisonnable" de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par "raisonnable"...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d - \Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d - \Phi|$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle “raisonnable” de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par “raisonnable”...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d-\Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d-\Phi|$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle "raisonnable" de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par "raisonnable"...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d - \Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d - \Phi|$

Estimation sous incertitudes en l'absence de coût

Q. Peut-on proposer une estimation ponctuelle "raisonnable" de Φ dans un cadre bayésien en l'absence d'une fonction de coût ?

R. Dépend de ce que l'on entend par "raisonnable"...

Heuristiques proposées : emploi de caractéristiques de localisation de $\pi(\Phi|D)$ telles que

- le mode (Barnett (1982))
- la moyenne ou la médiane (Berger (1980)) : revient à utiliser le coût quadratique $c(d\,;\Phi) = (d-\Phi)^2$, ou valeur absolue $c(d\,;\Phi) = |d-\Phi|$

Estimateur prédictif

Geisser (1971) propose d'estimer $\Phi(\Theta)$, vue comme une fonction $\Phi(\,H(\Theta)\,)$ de la distribution $H(\Theta)$, par

$$\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,),$$

où $H(\cdot|D)$ est la distribution *prédictive* de Y,

$$\begin{aligned} H(t|D) &= \int H(t|\Theta)\pi(\Theta|D)\,\mathrm{d}\Theta \\ &= \mathbb{E}[H(t|\Theta)|D]. \end{aligned}$$

Estimateur prédictif

Geisser (1971) propose d'estimer $\Phi(\Theta)$, vue comme une fonction $\Phi(\,H(\Theta)\,)$ de la distribution $H(\Theta)$, par

$$\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,),$$

où $H(\cdot|D)$ est la distribution *prédictive* de Y,

$$\begin{aligned} H(t|D) &= \int H(t|\Theta)\pi(\Theta|D)\,\mathrm{d}\Theta \\ &= \mathbb{E}[H(t|\Theta)|D]. \end{aligned}$$

Estimateur prédictif

Geisser (1971) propose d'estimer $\Phi(\Theta)$, vue comme une fonction $\Phi(\,H(\Theta)\,)$ de la distribution $H(\Theta)$, par

$$\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,),$$

où $H(\cdot|D)$ est la distribution *prédictive* de Y,

$$\begin{aligned} H(t|D) &= \int H(t|\Theta)\pi(\Theta|D)\,\mathrm{d}\Theta \\ &= \mathbb{E}[H(t|\Theta)|D]. \end{aligned}$$

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \rightarrow H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \rightarrow \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS. . .

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\rightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\, H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \to H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \to \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\to$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \rightarrow H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \rightarrow \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\rightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \to H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \to \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\longrightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \rightarrow H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \rightarrow \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\rightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \rightarrow H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \rightarrow \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\rightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\, H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \to H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \to \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\longrightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Remarques

- Variante de l'estimateur "plug-in" (substitution $H(\cdot|\Theta) \rightarrow H(\cdot|D)$ à la place de $\Theta \rightarrow \widehat{\Theta}$)
- Interprété dans dans de Rocquigny (2006) comme une "propagation d'incertitudes" de Θ à Y
- Permet d'estimer toute quantité d'intérêt $\Phi(\Theta)$ sans spécifier de fonction de coût

MAIS...

Q1. $\Phi(\Theta)$ caractéristique à fort enjeu de la distribution $H(\cdot|\Theta)$ de la sortie d'un système physique, alors que $H(\cdot|D)$ ne décrit aucun système physique observable

$\rightarrow$ Comment interpréter $\widehat{\Phi}^{pred.} = \Phi(\,H(\cdot|D)\,)$?

Q2. Quelles conséquences de cette heuristique au plan décisionnel ?

Propriétés

- Christensen et Huffman (1985) montrent que si $\Phi(\Theta) = \mathbb{E}[g(Y)|\Theta]$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.} = \mathbb{E}[\Phi(\Theta)|D]$ (revient à adopter un coût quadratique)
- Plus généralement :

Théorème

Si Φ peut s'écrire

$$\Phi(\,H(\Theta)\,) = \arg\min_d c(\,d; H(\Theta)\,),$$

pour un certain coût $c(\,d; H(\Theta)\,)$ linéaire en $H(\Theta)$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.}$ coïncide avec l'estimateur de Bayes relatif au même coût.

- S'applique à toutes les quantités d'intérêt considérées ici
- Interprétation : choix d'une fonction de coût abandonnée à l'heuristique de calcul

Propriétés

- Christensen et Huffman (1985) montrent que si $\Phi(\Theta) = \mathbb{E}[g(\mathrm{Y})|\Theta]$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.} = \mathbb{E}[\Phi(\Theta)|D]$ (revient à adopter un coût quadratique)
- Plus généralement :

Théorème

Si Φ peut s'écrire

$$\Phi(\,H(\Theta)\,) = \arg\min_{d} c(\,d; H(\Theta)\,),$$

pour un certain coût $c(\,d; H(\Theta)\,)$ linéaire en $H(\Theta)$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.}$ coïncide avec l'estimateur de Bayes relatif au même coût.

- S'applique à toutes les quantités d'intérêt considérées ici
- Interprétation : choix d'une fonction de coût abandonnée à l'heuristique de calcul

Propriétés

- Christensen et Huffman (1985) montrent que si $\Phi(\Theta) = \mathbb{E}[g(\mathrm{Y})|\Theta]$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.} = \mathbb{E}[\Phi(\Theta)|D]$ (revient à adopter un coût quadratique)
- Plus généralement :

Théorème

Si Φ peut s'écrire

$$\Phi(\, H(\Theta)\,) = \arg\min_{d} c(\, d; H(\Theta)\,),$$

pour un certain coût $c(\, d; H(\Theta)\,)$ linéaire en $H(\Theta)$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.}$ coïncide avec l'estimateur de Bayes relatif au même coût.

- S'applique à toutes les quantités d'intérêt considérées ici
- Interprétation : choix d'une fonction de coût abandonnée à l'heuristique de calcul

Propriétés

- Christensen et Huffman (1985) montrent que si $\Phi(\Theta) = \mathbb{E}[g(\mathrm{Y})|\Theta]$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.} = \mathbb{E}[\Phi(\Theta)|D]$ (revient à adopter un coût quadratique)
- Plus généralement :

Théorème

Si Φ peut s'écrire

$$\Phi(\, H(\Theta)\,) = \arg\min_d c(\, d; H(\Theta)\,),$$

pour un certain coût $c(\, d; H(\Theta)\,)$ linéaire en $H(\Theta)$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.}$ coïncide avec l'estimateur de Bayes relatif au même coût.

- S'applique à toutes les quantités d'intérêt considérées ici
- Interprétation : choix d'une fonction de coût abandonnée à l'heuristique de calcul

Propriétés

- Christensen et Huffman (1985) montrent que si $\Phi(\Theta) = \mathbb{E}[g(\mathrm{Y})|\Theta]$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.} = \mathbb{E}[\Phi(\Theta)|D]$ (revient à adopter un coût quadratique)
- Plus généralement :

Théorème

Si Φ peut s'écrire

$$\Phi(\,H(\Theta)\,) = \arg\min_d c(\,d;H(\Theta)\,),$$

pour un certain coût $c(\,d;H(\Theta)\,)$ linéaire en $H(\Theta)$, alors $\widehat{\Phi}^{pred.}$ coïncide avec l'estimateur de Bayes relatif au même coût.

- S'applique à toutes les quantités d'intérêt considérées ici
- Interprétation : choix d'une fonction de coût abandonnée à l'heuristique de calcul

Exemples

- $\Phi = \mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)$ proba de débordement d'une digue de hauteur $h = 4.5\ m$:

$$\widehat{\mathbb{P}}^{pred.}(Z_c \geq Z_v + h) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)|D] = 5.9 \times 10^{-3}.$$

(coût quadratique)

- Crue centennale $q_{99\%}$ avec $\alpha = 1/99$:

$$\widehat{q_{99\%}}^{pred.} = 8.56\ m.$$

(coût linéaire par morceau)

Exemples

- $\Phi = \mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)$ proba de débordement d'une digue de hauteur $h = 4.5\, m$:

$$\widehat{\mathbb{P}}^{pred.}(Z_c \geq Z_v + h) = \mathbb{E}[\,\mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)|D\,] = 5.9 \times 10^{-3}.$$

(coût quadratique)

- Crue centennale $q_{99\%}$ avec $\alpha = 1/99$:

$$\widehat{q_{99\%}}^{pred.} = 8.56\, m.$$

(coût linéaire par morceau)

Exemples

- $\Phi = \mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)$ proba de débordement d'une digue de hauteur $h = 4.5\,m$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}^{pred.}(Z_c \geq Z_v + h) &= \mathbb{E}[\,\mathbb{P}(Z_c \geq Z_v + h)|D\,] \\ &= 5.9 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

  (coût quadratique)

- Crue centennale $q_{99\%}$ avec $\alpha = 1/99$:

$$\widehat{q_{99\%}}^{pred.} = 8.56\,m.$$

  (coût linéaire par morceau)

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude ...

Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Approches descriptives

Q. Que faire si on ne dispose pas d'une fonction de coût explicite ?

R. Introduire une fonction de coût simplifiée codant les enjeux de l'étude . . .

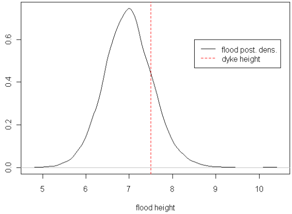
Q. Parfois inapproprié, e.g. si l'étude vise à vérifier le respect d'une norme $\Phi < M$ (en fiabilité notamment). Que faire alors ?

R. Se borner à quantifier l'incertitude sur Φ, sous la forme :

- soit d'un intervalle de confiance pour Φ;
- soit de la distribution *a posteriori* de Φ.

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

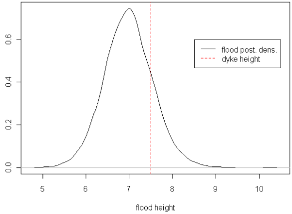
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

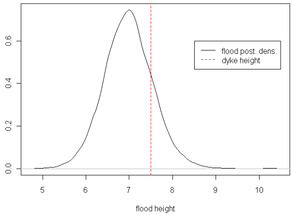
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR. . .

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

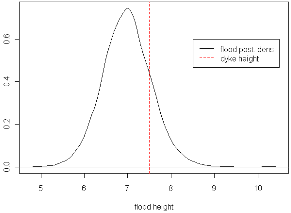
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

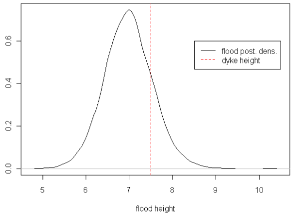
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

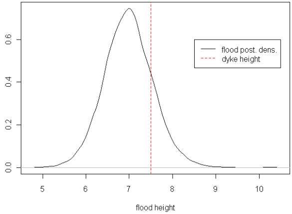
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

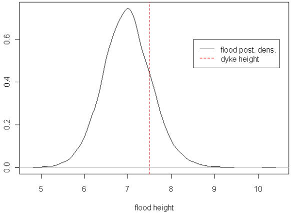
Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Exemple

Densité *a posteriori* de $q_{99\%}$ (hauteur de la digue en rouge)



Q. A-t-on : $q_{99\%} < Z_v + 7.5m$?

R.1 $\widehat{q_{99\%}} = Z_v + 6.96m$ (estimateur MLE) : OUI

Q. Et si on prend en compte l'incertitude épistémique ?

R.2 $\mathbb{P}(q_{99\%} > Z_v + 7.5|D) = 0.17$: PAS SI SÛR...

- Bilan : Compte-tenu de l'incertitude sur l'état de la nature, les données ne permettent pas à l'analyste de conclure.
- Il revient au décideur de trancher si 0.17 constitue un pari acceptable ou non

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis.

Discussion

Il nous semble important de répondre aux deux questions suivantes dans le choix d'une méthodologie pour l'analyse d'incertitudes :

Q. Dispose-t-on de beaucoup de données ?

- **OUI** En situation d'information (presque) parfaite, toutes les approches deviennent équivalentes
- **NON** Si peu de données sont disponibles, la prise en compte de l'incertitude épistémique devient indispensables

Q. Les enjeux de l'étude sont-ils formalisables sous forme d'une fonction de coût ?

- **OUI** L'estimation bayésienne fourni une l'approche optimale pour minimiser un coût sous incertitude
- **NON** Lorsque peu d'informations sont disponibles, il est crucial de décrire l'incertitude affectant Φ de manière aussi complète que possible.

Dans tous le cas, il est essentiel de s'interroger sur les propriétés des méthodes employées, et de questionner les usages établis

Bibliographie

[1] T. Aven (2003) Foundations of Risk Analysis. Wiley.
[2] V. Barnett (1982) Comparative Statistical Inference (2nd ed.), New York : John Wiley.
[3] J. O. Berger (1980) Statistical Decision Theory, Foundations, Concepts and Methods, New York ; Springer Verlag.
[4] J. Bernier (2003) Décisions et comportement des décideurs face au risque hydrologique / Decisions and attitude of decision makers facing hydrological risk. Hydrological Sciences Journal, 43(3) :301 – 316.
[5] Stephen E. Chick (2009) Subjective Probability and Bayesian Methodology , Handbook in Operations Research and Management Science, Volume 13, 225–257.
[6] Ronald Christensen and Michael D. Huffman (1985) Bayesian Point Estimation Using the Predictive Distribution, The American Statistician, 39(4), 319–321.
[7] Marc C. Kennedy and Anthony O'Hagan (2001) Bayesian calibration of computer models, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological, 63, 425–464.
[8] S. Geisser (1971) The Inferential Use of Predictive Distributions, in Foundations of Statistical Inference, eds. V. P. Godambe, D. A. Sprott, Toronto : Holt, Rinehart & Winston.
[9] E. de Rocquigny (2006) La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel, 2nde partie : revue des méthodes de modélisation statistique, physique et numérique, Journal de la SFdS, 147(3) : 73–106.
[10] E. de Rocquigny, S. Tarantola N. Devictor (2008) Uncertainty in Industrial Practice, Wiley.